



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025
CLASA a 9-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului

Problema 1 (autor Alina Paraschiv)

Se consideră triunghiul ABC , cu $BC = 4$, $CA = 6$ și $AB = 8$.

- a) Calculați AC' , unde C' este punctul de tangență al laturii AB cu cercul înscris în triunghi.
- b) Fie $p \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ și T punctul din planul triunghiului astfel încât $p\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + 3\overrightarrow{CT} = \vec{0}$. Dreptele AT și BC se intersectează în punctul D . Aratăți că D aparține cercului înscris în triunghi.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă A' și B' sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu latura BC și respectiv CA , atunci $AC' = \overset{not}{AB'} = x$, $BC' = \overset{not}{BA'} = y$ și $CA' = \overset{not}{CB'} = z$. Atunci $x + y = 8$, $y + z = 4$ și $z + x = 6$. Rezultă $x + y + z = 9$, deci $x = 5$.	3p
$BA' = y = 3$ și $CA' = z = 1$, deci $4\overrightarrow{TA'} = \overrightarrow{TB} + 3\overrightarrow{TC} = p\overrightarrow{AT}$	2p
Rezultă că A, T și A' sunt coliniare, și, cum $A' \in BC$, obținem $D = A'$	2p

Problema 2 (autor Daniel Nuț, G.M.11/2024)

Determinați numerele reale x astfel încât $x^4 - 2x^2 - [x] = 0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $x \in \mathbb{R}$ este o soluție, atunci $[x+1] = [x] + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$, deci $x \geq -1$	1p
Dacă $x \geq 2$, atunci $[x] = x^2(x^2 - 2) \geq 2x^2 > x$, fals, deci $x < 2$	2p
Pentru $x \in [-1, 0)$, ecuația devine $(x^2 - 1)^2 = 0$, cu soluția convenabilă $x = -1$.	1p
Pentru $x \in [0, 1)$, ecuația devine $x^2(x^2 - 2) = 0$, cu soluția convenabilă $x = 0$.	1p
Pentru $x \in [1, 2)$, ecuația devine $(x^2 - 1)^2 = 2$, cu soluția convenabilă $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, deci numerele cerute sunt 0, 1 și $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$	2p

Problema 3 (autor Flavian Georgescu)

Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Știind că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$ și $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} \leq 3\sqrt{2}$, arătați că $c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d} \geq 3\sqrt{2}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Este suficient să demonstrăm că $\sum a + \sum \frac{1}{a} \geq 6\sqrt{2}$	1p
Din inegalitățile C-B-S și AM-HM obținem $S = a + b + c + d \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = 2\sqrt{2}$ și $\sum \frac{1}{a} \geq \frac{16}{S}$	2p
Rezultă $\sum a + \sum \frac{1}{a} - 6\sqrt{2} \geq S + \frac{16}{S} - 6\sqrt{2} = \frac{(S - 2\sqrt{2})(S - 4\sqrt{2})}{S} \geq 0$, deoarece $S - 4\sqrt{2} < S - 2\sqrt{2} \leq 0$	4p

Problema 4 (autor ****)

Se consideră numerele naturale a_i , $i = \overline{1, 6}$ cu $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 \leq 16$. Arătați că există două submulțimi $\{i, j\}$ și $\{k, p\}$, distincte (nu neapărat disjuncte), ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, astfel încât $a_j - a_i = a_p - a_k$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Considerăm diferențele $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_6 - a_5$ și $a_3 - a_1, a_4 - a_2, a_5 - a_3, a_6 - a_4$. Dacă S este suma celor 9 diferențe, atunci $S = 2a_6 + a_5 - a_2 - 2a_1$.	2p
$S \leq 2 \cdot 16 + 15 - 2 - 2 \cdot 1 = 43$	2p
Dacă cele 9 diferențe sunt distincte două câte două, atunci $S \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, contradicție. Deci două dintre diferențe sunt egale.	3p